12/01/16

Υπενθύμιση: Έστω F σώμα, και V, W διαν. χώροι επί του F. Μια απεικόνιση $T: V \to W$ λέγεται ΓΡΑΜΜΙΚΗ αν
i) $f(u+v) = f(u) + f(v)$ για κάθε $u, v \in V$
ii) $f(\lambda u) = \lambda \cdot f(u)$ για κάθε $\lambda \in F$, $v \in V$
π.χ. η $f: R^3 \to R$ με $f(x,y,z) = 3x+5y-z$ είναι γραμμική,
η $g: R^3 \to R$ με $g(x,y,z) = x+y+z^2$ δεν είναι
γιατί $g(3 \cdot (0,0,1)) = g((0,0,3)) = 9$ ενώ $3(g(0,0,2)) = 3 \cdot 4 = 12$
άρα η ii) δεν ικανοποιείται για $\lambda = 3$ $u = (0,0,2)$

Υπενθύμιση: Αν $f: V \to W$ γραμμική, τότε $f(0_V) = 0_W$
και $f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_k v_k) = \lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2) + \dots + \lambda_k f(v_k)$ * για κάθε $\lambda_1 \dots \lambda_k \in F$, $v_1 \dots v_k \in V$

Από την (*) προκύπτει ότι αν $f: V \to W$ γραμμική και $V = \langle v_1 \dots v_k \rangle$ ** τότε αν ξέρουμε τα $f(v_1), f(v_2) \dots f(v_k)$ τότε από την (*) ξέρουμε την f γιατί (**) $\Rightarrow$ αν $v \in V$, τότε υπάρχουν $\lambda_i \in F$, ώστε $V = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k$

Πρόταση: Έστω F σώμα, V, W διαν. χώροι επί του F $e_1, e_2, \dots e_n$ βάση του V και $w_1, w_2 \dots w_n \in W$
Τότε υπάρχει μοναδική γραμμική απεικόνιση $f: V \to W$ με την ιδιότητα $f(e_i) = w_i$ για κάθε $i = 1, 2 \dots n$. Πιο συγκεκριμένα έστω $v \in V$. Αφού $e_1 \dots e_n$ βάση του V υπάρχουν μοναδικά $\lambda_i \in F$ ώστε $V = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$. Από την * έχουμε $f(v) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i w_i \in W$

Παράδειγμα: $V=\mathbb{R}^2$ με βάση $e_1=(1,0)$, $e_2=(0,1)$ και $w_1=(a,b)\in\mathbb{R}^2$, $w_2=(c,d)\in\mathbb{R}^2$. Από την πρόταση υπάρχει μοναδική ΓΡΑΜΜΙΚΗ απεικόνιση $f: V=\mathbb{R}^2 \to W=\mathbb{R}^2$ με την ιδιότητα $f(e_1)=w_1$, $f(e_2)=w_2$.
Ποιος είναι ο τύπος της f;
Απάντηση: Από την πρόταση $f(\lambda_1 e_1+\lambda_2 e_2)=\lambda_1 w_1+\lambda_2 w_2$ για κάθε $\lambda_1,\lambda_2\in A$. Επομένως, αφού $\lambda_1 e_1+\lambda_2 e_2=\lambda_1(1,0)+\lambda_2(0,1)=(\lambda_1,\lambda_2)$ έχουμε από την *

$$f((\lambda_1,\lambda_2))=f(\lambda_1 e_1+\lambda_2 e_2)=\lambda_1 w_1+\lambda_2 w_2=\lambda_1(a,b)+\lambda_2(c,d)$$
$$=(\lambda_1 a+\lambda_2 c,\ \lambda_1 b+\lambda_2 d)$$

για κάθε $(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{R}^2$.

Πρόταση: Έστω V,W διαν. χώρος επί του F, $f: V\to W$ γραμμική.
i) Αν $v_1,v_2,\dots,v_n\in V$ είναι γραμμ. εξαρτημένα, τότε τα $f(v_1),f(v_2)\dots,f(v_n)\in W$ είναι γραμμ. εξαρτημένα.
ii) Αν η f είναι 1-1 και $v_1,\dots v_n\in V$ γραμμ. ανεξάρτητα, τότε τα $f(v_1)\dots f(v_n)$ είναι γραμμ. ανεξάρτητα.
iii) Αν η f είναι επί και $V=\langle v_1\dots v_n\rangle$ τότε $W=\langle f(v_1),f(v_2)\dots,f(v_n)\rangle$
iv) Αν f ΙΣΟΜΟΡΦΙΣΜΟΣ (που από τον ορισμό σημαίνει f 1-1 και επί) τότε τα $v_1\dots v_n\in V$ είναι βάση του V αν και μόνο αν $f(v_1),f(v_2)\dots f(v_n)\in W$ βάση του W

Απόδειξη
i) Αφού $v_1\dots v_n$ γραμμ. εξαρτημένα, υπάρχουν $\lambda_1\dots\lambda_n\in F$ όχι όλα μηδέν με $\lambda_1 v_1+\lambda_2 v_2+\dots+\lambda_n v_n=0_V$. Άρα $f(\lambda_1 v_1+\dots+\lambda_n v_n)=f(0_V)$. Αφού η f γραμμική, έπεται $\lambda_1 f(v_1)+\lambda_2 f(v_2)+\dots+\lambda_n f(v_n)=0_W$. Σαν συνέπεια $f(v_1),f(v_2)\dots f(v_n)$ γραμμ. εξαρτημένα.

ii) Έστω $f: V \to W$ γραμμική 1-1 και $v_1 \ldots v_n \in V$ γραμμ. ανεξάρτητα. Υποθέτουμε $f(v_1), f(v_2) \ldots f(v_n)$ είναι γραμμ. εξαρτημένα και θα βρούμε αντίφαση. Αφού $f(v_1) \ldots f(v_n)$ γραμμ. εξαρτημένα υπάρχουν $\lambda_1 \ldots \lambda_n \in F$ όχι όλα μηδέν με $\lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2) + \ldots + \lambda_n f(v_n) = 0_W$ ①

Αφού f γραμμική έχουμε $f(0_V) = 0_W$ και η ① $\Rightarrow$
$f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n) = 0_W = f(0_V)$

Χρησιμοποιώντας την υπόθεση f 1-1 η ② $\Rightarrow$
$\lambda_1 v_1 + \ldots \lambda_n v_n = 0_V$ άρα $v_1, v_2 \ldots v_n$ γραμμ. εξαρτημένα αντίφαση!!!

iii) Υποθέτουμε $f: V \to W$ γραμμική και επί, $V = \langle v_1, v_2 \ldots v_n \rangle$
Θα δείξουμε ότι $W = \langle f(v_1), f(v_2), \ldots f(v_n) \rangle$. Πράγματι, έστω $w \in W$. Αφού f επί υπάρχει $v \in V$ με $f(v) = w$ ①

Αφού $V = \langle v_1 \ldots v_n \rangle$ και $v \in V$, υπάρχουν $\lambda_i \in F$
με $v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n$ (2)

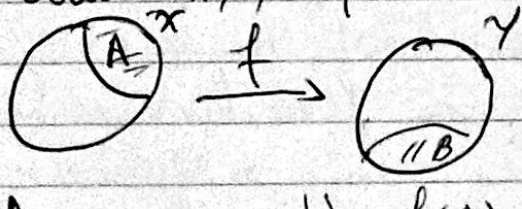
Αφού f γραμμική (2) $\Rightarrow f(v) = \lambda_1 f(v_1) + \ldots + \lambda_n f(v_n)$
άρα από ① $w = \lambda_1 f(v_1) + \ldots + \lambda_n f(v_n)$

Συμπέρασμα: $W = \langle f(v_1), \ldots, f(v_n) \rangle$

iv) Προκύπτει από τα i), ii), iii) (Άσκηση)

Υπενθύμιση (Από Θ. Συνόλων)

Έστω X, Y μη κενά σύνολα, $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$



Από τον ορισμό $f(A) = \{f(\alpha) : \alpha \in A\}$ είναι υποσύνολο του Y και από τον ορισμό $f^{-1}(B) = \{\alpha \in A : f(\alpha) \in B\}$ είναι υποσύνολο του X.

ΠΡΟΣΟΧΗ: Δεν υποθέτουμε ότι f „1-1", επί. Τα $f(A)$, $f^{-1}(B)$ ορίζουμε για κάθε f

Πρόταση: Έστω F σώμα, V, W διαν. χώροι επί του F, A υπόχωρος του V, B υπόχωρος του W και $f: V \to W$ γραμμική. Τότε

i) Το $f(A)$ είναι υπόχωρος του W

ii) Το $f^{-1}(B)$ είναι υπόχωρος του V

Απόδειξη

i) Θα δείξουμε ότι α) $0_W \in f(A)$, β) $w, w' \in f(A) \Rightarrow w+w' \in f(A)$

γ) $\lambda \in F, w \in f(A) \Rightarrow \lambda \cdot w \in f(A)$

Για το α: Αφού A υπόχωρος του V, έχουμε $0_V \in A$. Αφού f γραμμική $0_W = f(0_V)$, άρα $0_W \in f(A)$

Για το β,γ: Έστω $w, w' \in f(A)$ και $\lambda \in F$. Αφού $w \in f(A)$ υπάρχει $v \in A$ με $w = f(v)$. (1) Ομοίως αφού $w' \in f(A)$ υπάρχει $v' \in A$ με $f(v') = w'$ (2)

$(1)+(2) \Rightarrow w+w' = f(v)+f(v') \overset{f\ \text{γραμ.}}{=} f(v+v')$ (3). Αφού A υπόχωρος του V, $v, v' \in A \Rightarrow v+v' \in A$. Άρα $(3) \Rightarrow w+w' \in f(A)$

Ομοίως $\lambda w \Rightarrow \lambda f(v) \xrightarrow{f\ \text{γραμ.}} f(\lambda v)$. Αφού A υπόχωρος και $v \in A$ έχουμε $\lambda v \in A$. Άρα η (4) δίνει $\lambda w \in f(A)$

Σαν συμπέρασμα, $f(A)$ υπόχωρος του W. Άρα δείξαμε το i

Απόδειξη του ii

Έστω B υπόχωρος του W. Θα δείξουμε $f^{-1}(B)$ υπόχωρος του V. Πιο συγκεκριμένα θα δείξουμε ότι

α) $0_V \in f^{-1}(B)$

β) Αν $v, v' \in f^{-1}(B)$ τότε $v+v' \in f^{-1}(B)$

γ) $\lambda \in F$ και $v \in f^{-1}(B)$ τότε και $\lambda v \in f^{-1}(B)$

Για το α: Αφού B υπόχωρος του W έπεται $0_W \in B$ αφού f γραμμική $f(0) = 0_W \in B \Rightarrow 0_V \in f^{-1}(B)$

Απόδειξη

β,γ) Αφού $v, v' \in f^{-1}(B)$ έχουμε $f(v) \in B$ και $f(v') \in B$

Άρα αφού B υπόχωρος $f(v)+f(v') \in B$ και $\lambda f(v) \in B$

Αλλά f γραμμική $\Rightarrow f(v+v') = f(v)+f(v') \in B \Rightarrow v+v' \in f^{-1}(B)$

Ομοίως f γραμμική $\Rightarrow f(\lambda v) = \lambda \cdot f(v) \in B \Rightarrow$
$\lambda v \in f^{-1}(B)$. Συμπέρασμα $f^{-1}(B)$ υπόχωρος του V

Ορισμός: Έστω F σώμα, V, W διαν. χώροι επί του F και $F: V \to W$ γραμμική.
i) Ορίζουμε πυρήνα του f ως εξής:
$\ker f = \{v \in V : f(v) = 0_W\}$
Με άλλα λόγια $\ker f = f^{-1}(\{0_W\})$, δηλ. $\ker f$ είναι η αντίστροφη εικόνα μέσω της f του μηδενικού υπόχωρου του W. Από την προηγούμενη πρόταση $\ker f$ είναι υπόχωρος του V.
ii) Ορίζουμε εικόνα του f τον υπόχωρο $\operatorname{Im} f = f(V)$ του W (είναι υπόχωρος από την προηγούμενη πρόταση) Με άλλα λόγια $f(V) = \{f(v) : v \in V\}$

Παράδειγμα: Έστω $V = W$ και $f = id_V : V \to V$ είναι η ταυτοτική συνάρτηση $V \to V$, με $id_V(u) = u$ για κάθε $u \in V$. Τότε $\ker f = \{v \in V : f(v) = 0_V\} = \{v \in V : v = 0_V\} = \{0_V\}$ δηλ. $\ker f$ είναι ο υπόχωρος του V
$\operatorname{Im} f = f(V) = \{f(v) : v \in V\} = \{v : v \in V\} = V$

ii) Έστω $f: V \to W$ με $f(v) = 0_W$ για κάθε $v \in V$. Εύκολα δει ότι f γραμμική. Τότε $\ker f = \{v \in V : f(v) = 0_W\} = V$, $\operatorname{Im} f = \{0_W\}$, γιατί η f σταθερή συνάρτηση με 0_W
iii) Έστω $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ η γραμμική απεικόνιση με $f((x,y,z)) = (x,y)$ για κάθε $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Τότε, $\ker f = \{(0,0,z) : z \in \mathbb{R}\}$ και $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^2$

iv) Έστω $T: \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$ με $T(f(x)) = f'(x)$ η παράγωγος του $f(x)$. Τότε $\ker T = \{a_0 : a_0 \in \mathbb{R}\}$ (γιατί αν
$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$
$T f(x) = (a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots + n a_n x^{n-1})$ και
$\operatorname{Im} T = \mathbb{R}[x]$, γιατί αν $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ και θέτουμε $h(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{i+1} x^{i+1}$ τότε $T(h(x)) = f(x)$

Πρόταση: Έστω $f: V \to W$ γραμμική απεικόνιση. Τότε η f είναι 1-1 αν και μόνο αν $\ker f = \{0_V\}$

Απόδειξη
Υποθέτουμε f "1-1". Αφού f γραμμική $f(0_V) = 0_W$ (1)
άρα $0_V \in \ker f$. Έστω $v \in \ker f$. Τότε $f(v) = 0_W$ (2)
Από (1) και (2) αφού f "1-1" $\Rightarrow v = 0_V$. Άρα
$\ker f = \{0_V\}$
Αντίστροφα, υποθέτουμε $\ker f = \{0_V\}$. Θα δείξουμε ότι f "1-1". Πράγματι, έστω $v, v' \in V$ με
$f(v) = f(v')$. Έχουμε $f(v) = f(v') \overset{f \text{ γραμμ.}}{\Longrightarrow} f(v) - f(v') = 0_W \Rightarrow$
$f(v - v') = 0_W \Rightarrow v - v' \in \ker f$. Από υπόθεση
$\ker f = \{0_V\}$. Άρα $v - v' = 0_V \Rightarrow v = v'$ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ f "1-1"

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ $\ker f$: Συνήθως ανάγεται σε λύση ομογενούς συστήματος γραμμικών εξισώσεων.

Πχ. Έστω $f: R^2 \to R$ γραμμική με $f((x,y)) = x-5y$ και $\ker f = \{(x,y) : x-5y=0\} = \dots$

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ $\operatorname{Im} f$: Έστω $f: V \to W$ γραμμική και $V = \langle v_1, v_2 \dots v_n \rangle$. Τότε από προηγούμενη πρόταση $\operatorname{Im} f = \langle f(v_1), f(v_2) \dots f(v_n) \rangle$

Παράδειγμα Υπολογισμού $\operatorname{Im} f$.
Έστω $f: R^2 \to R^3$ η γραμ. απεικόνιση με $f(x,y) = (x-y, x+2y, y)$. Θα υπολογίσουμε $\operatorname{Im} f$ που είναι υπόχωρος του R^3.
ΒΗΜΑ 1ο: Υπολογίζω σύνολο γεννητόρων για το R^2
Για παράδειγμα $R^2 = \langle v_1 = (1,0), v_2 = (0,1) \rangle$
ΒΗΜΑ 2ο: Υπολογίζω $f(v_1) = f((1,0)) = (1,1,0)$, $f(v_2) = f(0,1) = (-1,2,1)$ Άρα $\operatorname{Im} f = \langle f(v_1), f(v_2) \rangle = \langle (1,1,0), (-1,2,1) \rangle$